

大跨、高层结构动力弹塑性和倒塌分析(Ⅱ): 纤维程序 UMAT 原理与开发*

柳国环^{1,2}, 陆新征^{1,2}

(1 清华大学土木工程系, 北京 100084; 2 清华大学土木工程安全与耐久教育部重点实验室, 北京 100084)

[摘要] 简要回顾并论述钢材、无约束混凝土和受约束混凝土的本构骨架曲线特征参数与理论公式, 主要介绍箍筋和钢管对混凝土约束效应的计算方法, 并给出关于箍筋配筋率以及极限与峰值应变关系的处理依据的说明, 进而开发并实现了纤维数据的可视化生成程序 UMAT, 可生成钢筋混凝土、型钢混凝土以及钢管混凝土等常用截面形式的纤维数据。最后, 利用 UMAT 给出了两个典型构件截面纤维数据的操作流程。结果表明 UMAT 程序可为采用 MSC. MARC 软件进行结构的动力弹塑性和倒塌分析提供便利。

[关键词] UMAT; 钢管混凝土; 型钢混凝土; 动力弹塑性; 倒塌; MSC. MARC

中图分类号: TU973. 2, TP319 文献标识码: A 文章编号: 1002-848X(2014)04-0088-06

Dynamic elastic-plasticity and collapse analysis for large-span and high-rise structure (Ⅱ): theory and development of fiber-data program UMAT

Liu Guohuan^{1,2}, Lu Xinzheng^{1,2}

(1 Department of Civil Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China; 2 Key Laboratory of Civil Engineering Safety and Durability of China Education Ministry, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The constitutive skeleton curve characteristic parameters and theoretical formula models of steel, unconfined concrete and confined concrete were firstly reviewed and discussed in brief. Then, for the confined concrete, the calculating methods of the confinement effects of the stirrups and steel pipe on concrete were introduced and the processing instructions of the stirrup reinforcement ratio and the relationship between limitation and peak strain were given to give a birth to a visual program UMAT for material fiber-data. By using the UMAT, the fiber data output of several types of material sections such as the reinforced concrete, steel reinforced concrete, steel pipe concrete and so on can be operated. At last, the flow diagram of the fiber data of two type of typical frame section were further given. The results show that the program UMAT can provide convenience for structural dynamic elastic-plastic and collapse calculations when using MSC. MARC software.

Keywords: UMAT; steel pipe concrete; steel reinforced concrete; dynamic elastic-plastic; collapse; MSC. MARC

0 前言

文献[1]中开发了程序接口 SAP2MARC, 程序为采用 MSC. MARC 软件建立结构的几何模型、子程序材料名称与排序、钢混构件以及剪力墙等大大提供了便利。但在计算过程中, 文献[2]用到的子程序一般需要链接对应的纤维数据, 而这些纤维数据需要根据截面材料和形状等参数预先定义。本文主要内容涉及纤维数据(钢材和混凝土)的理论根据及其纤维数据生成程序 UMAT 的可视化开发。

根据纤维梁柱单元原理, 纤维数据需要提供各个纤维的形心位置(y, z 坐标)以及纤维面积, 以供软件等内部主程序的计算。同时, 一般还要提供影响本构关系的关键控制性参数, 这些参数需要根据相应纤维的材料以及不同子程序代码的判断、读取和计算逻辑来确定。对于混凝土本构关系的控制参数(例如峰值应力、峰值应变)而言, 需要考虑两种

约束效应: 箍筋约束和钢管约束。前者主要针对钢筋混凝土构件(尤其是箍筋加密区), 后者主要针对钢管混凝土构件。此外, 型钢混凝土和钢管混凝土构件所用的钢材与钢筋不同, 这种区别不仅体现在材料的属性上, 而且型钢的纤维划分也需尽量相对密集, 旨在能够更充分地反映材料的力学特性。

1 材料本构

1.1 钢材本构骨架曲线及其特征参数

参考文献[3]和[4], 钢材的本构关系骨架曲线如图 1 和式(1)所示。其中 k_1, k_2, k_3 和 k_4 为与曲线形状相关的特征参数, 相应参数的物理意义如图 1 所示。钢筋在外界作用下如果失效, 将用到参数 k_3 。对于不同种类的钢材, 相应参数有所区别, 具体

* 中国博士后科学基金(2011M500332)。
作者简介: 柳国环, 博士, 现为天津大学副教授, Email: carecivill@sina.com。

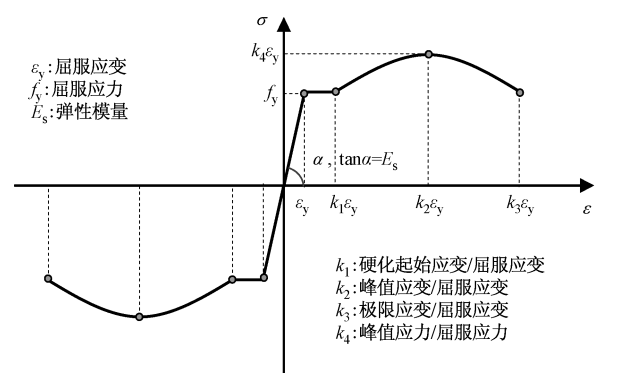


图 1 钢材本构骨架曲线示意

参数量化取值见表 1。由于本文内容主要是与纤维数据相关,故对滞回曲线的规则不做详细介绍,相关内容及子程序开发见文献[2]。

$$\sigma = \begin{cases} E_s \varepsilon = \left(\frac{f_y}{\varepsilon_y} \right) \varepsilon & (\varepsilon \leq \varepsilon_y) \\ f_y & (\varepsilon_y < \varepsilon \leq k_1 \varepsilon_y) \\ k_4 f_y + \frac{E_s (1 - k_4)}{\varepsilon_y (k_2 - k_1)^2} (\varepsilon - k_2 \varepsilon_y)^2 & (\varepsilon > k_1 \varepsilon_y) \end{cases} \quad (1)$$

钢筋与钢材的屈服应力 f_y 和弹性模量 E_s 依据《混凝土结构设计规范》(GB 50010—2010)取值,如表 2 所示,由此可得到屈服应变 $\varepsilon_y = f_y/E_s$ 。

钢材本构骨架曲线的形状特征参数 表 1				
钢材类别	形状特征参数			
	k_1	k_2	k_3	k_4
普通钢筋 ^[3,4]	4	25	40	1.2
硬钢/钢丝/钢绞线 ^[4]	1.2	10	40	1.2
预应力筋 ^[4]	1~2	10	40	1.2
型钢 ^[5]	12	120	190(建议值,缺乏资料)	1.2

钢材屈服强度与弹性模量 表 2			
型号		屈服强度 标准值 f_y /MPa	弹性模量 E_s /($\times 10^5$ MPa)
钢筋	HPB300	300	2.1
	HRB335	335	2.0
	HRB400	400	2.0
	HRB500	500	2.0
钢材	Q235	235	2.1
	Q345	345	2.1
	Q390	390	2.1
	Q420	420	2.1

1.2 混凝土单轴应力-应变关系曲线及其特征参数

文献[3]和[4]中无约束混凝土的单轴应力-应变关系曲线如图 2 所示,受压和受拉曲线表达式分别如式(2)和(3)所示。

受压时:

$$\sigma = (1 - d_c) E_c \varepsilon \quad (2)$$

其中:

$$d_c = \begin{cases} 1 - \rho_c n / (n - 1 + x_c^n) & (x \leq 1) \\ 1 - \rho_c / [\alpha_c (x - 1)^2 + x_c^n] & (x > 1) \end{cases}$$
$$\rho_c = f_c^p / E_c \varepsilon_c, n = E_c \varepsilon_c / (E_c \varepsilon_c - f_c^p),$$
$$x_c = \varepsilon / \varepsilon_c^p$$

式中: E_c 和 d_c 分别为混凝土的弹性模量和单轴受压损伤演化参数; α_c 为混凝土单轴受压应力-应变曲线下降段参数值。其他相关的参数的物理意义如图 2 所示。需要说明的是, f_c^p 可根据需要取值,例如可取标准值或设计值等。下文 UMAT 程序中采用的是标准值。

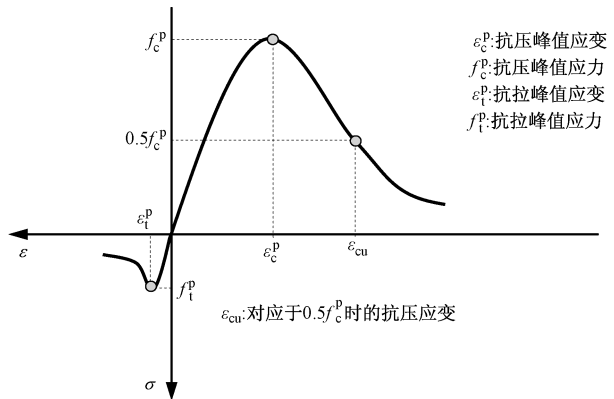


图 2 混凝土单轴本构关系曲线示意

受拉时:

$$\sigma = (1 - d_t) E_c \varepsilon \quad (3)$$

其中:

$$d_t = \begin{cases} 1 - \rho_t (1.2 - 0.2 x_t^5) & (x_t \leq 1) \\ 1 - \rho_t / [\alpha_t (x_t - 1)^{1.7} + x_t] & (x_t > 1) \end{cases}$$
$$\rho_t = f_t^p / E_c \varepsilon_t, x_t = \varepsilon / \varepsilon_t^p$$

式中: d_t 为单轴受拉损伤演化参数; α_t 为混凝土单轴受拉应力-应变曲线下降段参数值。其他相关参数的物理意义如图 2 所示。需要说明的是,不同文献对 f_t^p 与 f_c^p 关系取值建议不同,一般可直接通过 f_c^p 计算得到,具体可参考文献[6],[7],本文取如下的简单线性比例关系:

$$f_t^p = 0.12 f_c^p \quad (4)$$

1.3 箍筋对混凝土的约束效应

配置箍筋的钢筋混凝土是结构常见的构件形式。这时,箍筋对混凝土存在约束作用。根据文献[4],[8],[9],受箍筋约束的矩形和圆形截面钢筋混凝土构件剖面如图 3,4 所示。图 3 中, b 和 d 分别为矩形截面两方向的尺寸; b_c 和 d_c 分别为矩形截面最外肢箍筋两个方向的尺寸; ω_i 为相邻纵筋间净距; s 和 s' 分别为箍筋间距和净距。图 4 中, d 和 d_c 分别为圆形截面直径和圆形箍筋在垂直

于 y 轴向横截面投影的直径,其他参数意义同矩形截面。

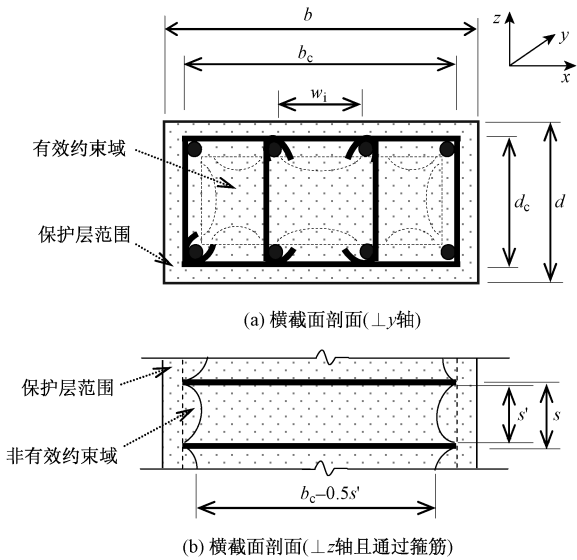


图3 矩形截面钢筋混凝土构件剖面示意

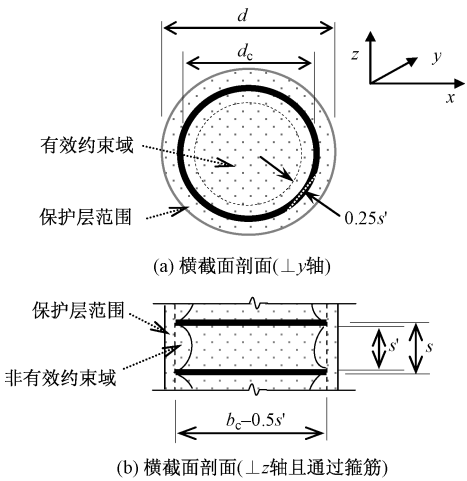


图4 圆形截面钢筋混凝土构件剖面示意

此时:

$$f_{c,h}^p = \lambda_{f,h} f_c^p, \lambda_{f,h} = 1 + 2.4I^{0.7} \tag{5}$$

$$\epsilon_{c,h}^p = \lambda_{\epsilon,h} \epsilon_c^p, \lambda_{\epsilon,h} = 1 + 35I^{1.2} \tag{6}$$

式中: $f_{c,h}^p$ 和 $\epsilon_{c,h}^p$ 分别为考虑约束效应后的混凝土受压峰值应力和峰值应变,为了方便表达,区别上文不考虑约束效应的混凝土受压峰值应力 f_c^p 和峰值应变 ϵ_c^p ,定义式(5)和(6)中 $\lambda_{f,h}$ 和 $\lambda_{\epsilon,h}$ 分别为受约束混凝土的受压峰值应力和峰值应变的放大系数; I 为约束指标,代表箍筋对混凝土约束效应的参数,依据文献[4],[8], I 可表示为:

$$I = k_h \rho_{h,v} \left(\frac{f_h}{f_c^p} \right) \tag{7}$$

其中 k_h 和 $\rho_{h,v}$ 分别为有效配箍参数和箍筋有效体积配箍率,且 k_h 的计算表达式对矩形截面(图3)为:

$$k_h = \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{6b_c d_c}\right) \left(1 - \frac{s'}{2b_c}\right) \left(1 - \frac{s'}{2d_c}\right)}{1 - \rho_{l,a}} \tag{8}$$

对圆形截面(图4)为:

$$k_h = \frac{\left(1 - \frac{s'}{2d_c}\right)^2}{1 - \rho_{l,a}} \tag{9}$$

式中: $\rho_{l,a}$ 为截面纵筋配箍率,若已知截面尺寸和钢筋纤维面积可直接计算得到。

考虑到便于程序编制以及计算结果的合理性,对于式(7)中有效体积配箍率 $\rho_{h,v}$,给出如下简要说明:圆形截面的钢筋混凝土构件常用于柱构件,因此式(7)中 $\rho_{h,v}$ 与适用于柱构件的“体积配箍率”概念对应,可直接采用。但是,考虑到矩形截面钢筋混凝土构件不仅常应用于柱构件,还普遍用于梁构件,而对于梁构件设计中需要控制的“配箍率”(箍筋面积配箍率)参数是面积配箍率(梁的箍筋主要是考虑在面内抵抗剪切变形,与柱构件不同),因此为了保持与工程中表述的一致性,在下文编制 UMAT 程序时,钢筋混凝土梁构件截面配箍率显示框内将同时给出面积配箍率和式(8)中的体积配箍率,由矩形梁的配箍率和相应参数间接得到式(7)中的 $\rho_{h,v}$,计算如下式所示:

$$\begin{aligned} \rho_{h,v} &= \frac{m\pi^2 r_h^2 d + 2\pi r_h^2 (b - 2t)}{bds} \\ &= \frac{m\pi r_h^2}{bs} + \frac{2\pi r_h^2 (b - 2t)}{bds} \\ &= \rho_{h,a} + \frac{2\pi r_h^2 (b - 2t)}{bds} \end{aligned} \tag{10}$$

式中: $\rho_{h,v}$ 为梁的面积配箍率; t 为保护层厚度; r_h 为箍筋的半径。

1.4 钢管对混凝土的约束效应

钢管混凝土构件在大跨和超高层建筑中常被采用,外钢管对其内置混凝土具有约束作用。参考文献[5],[10],受圆钢管约束的混凝土受压峰值应力 $f_{c,e}^p$ 和峰值应变 $\epsilon_{c,e}^p$ 、受矩形钢管约束的混凝土的受压峰值应力 $f_{c,r}^p$ 和峰值应变 $\epsilon_{c,r}^p$ 如下所示:

$$f_{c,e}^p = - [1 + (-0.054\gamma^2 + 0.4\gamma)(24/f_c)^{0.45}] f_c \tag{11}$$

$$\epsilon_{c,e}^p = - \{ (1\ 300 + 12.5f_c) + [1\ 400 + 800(f_c/24 - 1)]\gamma^{0.2} \} \times 10^{-6} \tag{12}$$

$$f_{c,r}^p = - [1 + (-0.0015\gamma^2 + 0.1\gamma)(24/f_c)^{0.45}] f_c \tag{13}$$

$$\epsilon_{c,r}^p = - \{ (1\ 300 + 12.5f_c) + [1\ 330 + 760(f_c/24 - 1)]\gamma^{0.2} \} \times 10^{-6} \tag{14}$$

式中: f_c 为混凝土圆柱体抗压强度; $f_{c,r}^p, f_{c,c}^p$ 与 f_c 单位均为 MPa; $\varepsilon_{c,c}^p$ 和 $\varepsilon_{c,r}^p$ 均为混凝土圆柱体的应变(不是微应变); γ 为外钢管对内置混凝土约束效应参数,与材料的强度及几何面积有关,可表示为:

$$\gamma = \frac{f_y A_s}{f_{ck} A_c}$$

(15)

式中: f_y 和 A_s 分别为外钢管的屈服强度与面积; f_{ck} 和 A_c 分别为内置混凝土的轴心抗压强度标准值与面积。

依据文献[11],式(11)~(14)中的 f_c 和式(15)中的 f_{ck} 可分别由下两式计算得到:

$$f_c = \begin{cases} 0.8f_{cu} & (f_{cu} \leq 50\text{MPa}) \\ f_{cu} - 10 & (f_{cu} > 50\text{MPa}) \end{cases}$$

(16)

$$f_{ck} = \begin{cases} 0.67f_{cu} & (f_{cu} \leq 50\text{MPa}) \\ (0.63 + 0.0008f_{cu})f_{cu} & (f_{cu} > 50\text{MPa}) \end{cases}$$

(17)

式中 f_{cu} 为立方体抗压强度。

2 混凝土极限与峰值参数关系处理依据

混凝土峰值抗压应力与峰值抗压应变如本文中第1节所述,本节给出混凝土抗压极限应力与抗压极限应变关系的处理依据及方法,为 UMAT 程序编制提供根据。

对于无约束混凝土,计算式如下:

$$\begin{cases} f_{cu} = \kappa_f f_c^p \\ \varepsilon_{cu} = \kappa_\varepsilon \varepsilon_c^p \end{cases}$$

(18)

式中: κ_f 为抗压极限应力与峰值应力的比值; κ_ε 为抗压极限应变与峰值应变的比值。

本文编制的 UMAT 程序中,根据文献[3]取 $\kappa_f = 0.5$,也可根据需要对该值进行修改。 κ_ε 也依据文献[3]取值,如表3所示。

混凝土峰值应变与极限应变相关参数取值							表 3
强度等级	C15	C20	C25	C30	C35	C40	C45
$\varepsilon_c^p / (\times 10^{-3})$	1.37	1.47	1.56	1.64	1.72	1.79	1.85
κ_ε	4.2	3	2.6	2.3	2.1	2	1.9
强度等级	C50	C55	C60	C65	C70	C75	C80
$\varepsilon_c^p / (\times 10^{-3})$	1.92	1.98	2.03	2.08	2.13	2.19	2.24
κ_ε	1.9	1.8	1.8	1.7	1.7	1.7	1.6

对于有箍筋约束的混凝土,UMAT 程序中的抗压峰值应力与峰值应变取值如第1.3节所述,极限应力计算方法同上述非约束混凝土,极限应变与峰值应变比值同表3中的 κ_ε 。

对于钢管约束的混凝土,UMAT 程序中的峰值应力与峰值应变取值如第1.4节所述。但是极限应力取值与上述的无约束混凝土和箍筋约束混凝土计算有所区别。这样处理的原因是根据文献[11]所

述和建议,钢管混凝土中的约束混凝土超过峰值压应变后的曲线表现与约束效应参数 γ 的大小有关,由此会呈现出强化和软化两种情形。对于圆钢管约束的混凝土而言,当 $\gamma \geq 1.12$ 和 $\gamma < 1.12$ 时的峰值压应变后的曲线分别表现为上升强化和软化,如图5所示,并可由下式确定:

圆钢管混凝土:

$$f = \begin{cases} f_{c,c}^p \{1 + q[(\varepsilon/\varepsilon_c^p)^{0.1\gamma} - 1]\} & (\gamma \geq 1.12) \\ f_{c,c}^p \left[\frac{\varepsilon/\varepsilon_c^p}{\beta(\varepsilon/\varepsilon_c^p - 1)^\eta + \varepsilon/\varepsilon_c^p} \right] & (\gamma < 1.12) \end{cases}$$

(19)

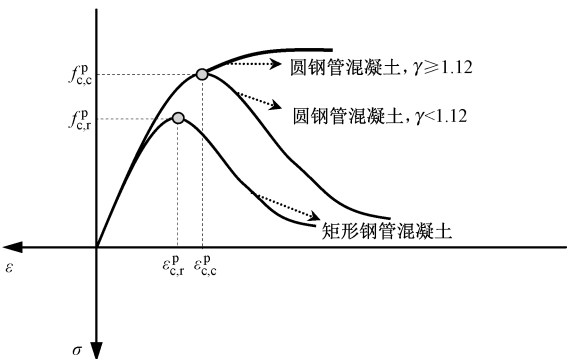


图5 钢管混凝土受压应力-应变曲线示意

式中: $q = \gamma^{0.745} / (2 + \gamma)$; $\beta = (3.51 \times 10^{-4}) \times (2.36 \times 10^{-5})^{[0.25 + (\gamma - 0.5)^2]} \times (f_c^p)^2$; $\eta = 2.0$ 。

对于矩形钢管混凝土,该曲线表现为下降软化,如图5所示,并可由下式确定:

矩形钢管混凝土:

$$f = f_{c,r}^p \left[\frac{\varepsilon/\varepsilon_c^p}{\beta(\varepsilon/\varepsilon_c^p - 1)^\eta + \varepsilon/\varepsilon_c^p} \right]$$

(20)

式中:

$$\beta = \begin{cases} \frac{(f_c^p)^{0.1}}{1.35 \sqrt{1 + \gamma}} & (\gamma \leq 3.0) \\ \frac{(f_c^p)^{0.1}}{1.35 \sqrt{1 + \gamma} (\gamma - 2)^2} & (\gamma > 3.0) \end{cases}$$

$$\eta = 1.6 + \frac{1.5}{\varepsilon/\varepsilon_c^p}$$

考虑到这种情况,将圆钢管混凝土和矩形钢管混凝土分开考虑,然后在程序中依据式(15)计算得到 γ ,并判断其大小,确定极限抗压应变与峰值抗压应变比值(可依据表3)后,通过式(19)和(20)可进一步计算得到极限抗压应力。

3 可视化程序 UMAT 编制及其功能

3.1 UMAT 编制与功能简介

UMAT 程序基于 Microsoft Visual Studio 开发环境和 Visual C#语言编制而成,包括如图6~9所示

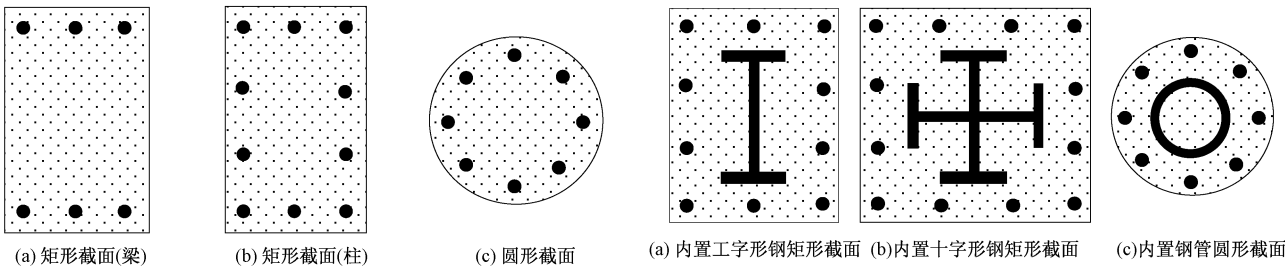


图 6 钢筋混凝土构件截面

图 7 型钢混凝土构件截面

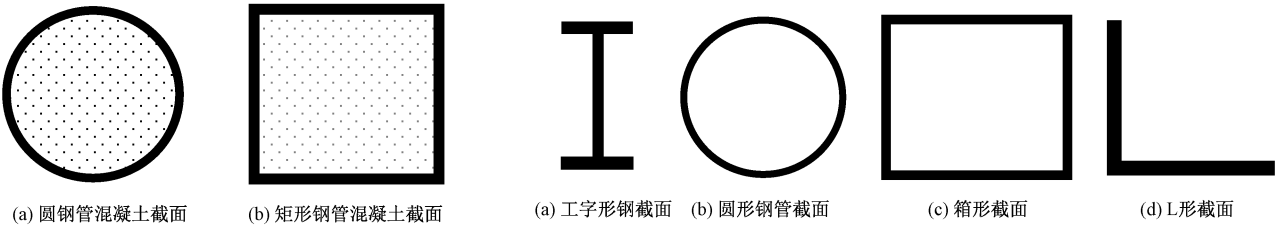
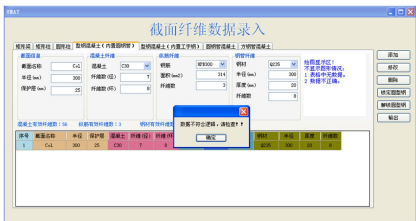


图 8 钢管混凝土构件截面

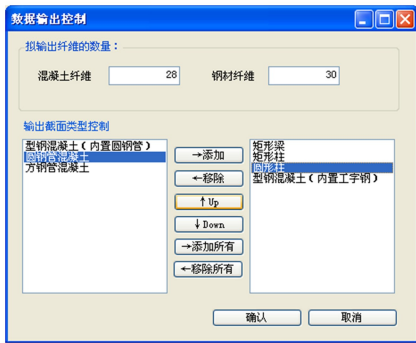
图 9 型钢截面



(a) 截面纤维录入界面



(b) 数据输入不合理提示



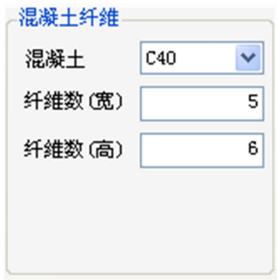
(c) 输出界面数据添加/移除控制



(d) 输出界面数据上下移动控制



(a) 截面信息设置



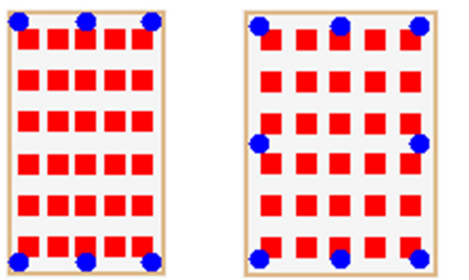
(b) 混凝土纤维设置



(c) 纵筋纤维设置

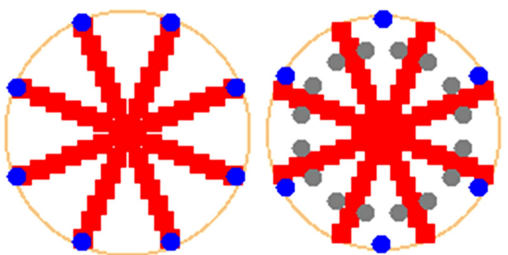


(d) 箍筋信息与配箍率显示



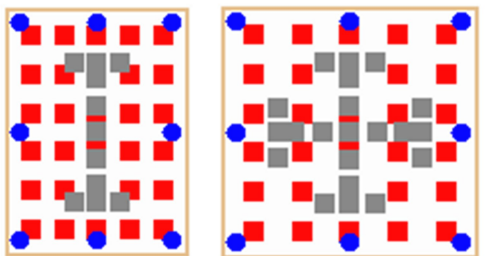
(a) RC矩形截面(梁)

(b) RC矩形截面(柱)

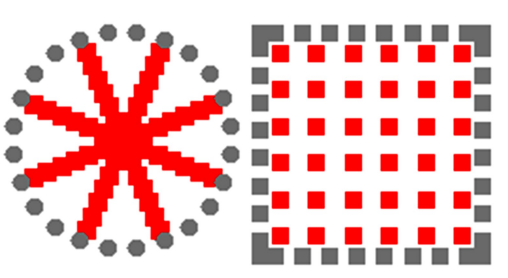


(c) RC圆形截面

(d) 内置钢管SRC圆形截面



(e) 内置 I 字形SRC矩形截面 (f) 内置十字形钢SRC矩形截面



(g) 圆钢管SPC截面

(h) 方钢管SPC截面

图 10 UMAT 程序输入界面与输出界面

图 11 UMAT 程序矩形梁截面数据设置与显示

图 12 UMAT 程序生成的截面纤维的图形显示

的几种常见截面,分别为钢筋混凝土构件、型钢混凝土构件和钢管混凝土构件截面以及型钢截面。

所编制的程序相关界面如图 10,11 所示,其具有友好的操作性,相关的功能与操作说明简述如下:

(1)根据需要进行选择截面类型,首先定义截面名称,然后按照截面材料组成、几何尺寸并结合需要,设置纤维数量及其相关参数,界面会显示材料的有效纤维数量。

(2)对于受约束的混凝土,程序会根据上文的理论和界面所输入的数据计算出相应的约束放大系数,从而可考虑箍筋或钢管对混凝土的约束效应。

(3)当截面数据设置完成后,点击右侧“添加”,则在界面表格中会增加当前截面的数据行。点击表格位置输入框时,纤维截面将会实时显示。改变数据可以在表格中重新编辑,也可以通过界面重新输入数据,点击“修改”功能实现。

(4)数据设置完毕并核实,点击锁定功能后数据不能被修改,等待数据输出;若需修改,则要进行解锁。

(5)数据输出前,不仅可以对输出的截面顺序进行排序,还可以对总纤维数量进行统一控制,以保证输出纤维数据的一致性。这时,比有效纤维数量多的纤维数量为“虚纤维”,“虚纤维”的坐标和面积均为零,对计算没有贡献。

3.2 纤维截面图形显示

在 UMAT 程序中定义各种纤维时,会在其当前界面右上侧给出相应的如图 12 所示的钢和混凝土的纤维显示,便于查看与检验,图中 RC 为钢筋混凝土;SRC 为型钢混凝土;SPC 为钢管混凝土。

4 结论

首先回顾了钢材料、无约束混凝土和受约束混凝土的本构骨架曲线特征参数与理论公式,介绍了箍筋和钢管对混凝土约束效应的计算方法,在此基础上所做的工作总结如下:

(1)开发并实现了纤维数据的可视化生成程序 UMAT,可生成钢筋混凝土、型钢混凝土以及钢管混凝土常用截面形式的纤维数据。对于钢筋混凝土和钢管混凝土,UMAT 程序考虑了箍筋和钢管对混凝土的约束效应。

(2)UMAT 程序输入功能及其界面操作具有友好性。可按照截面材料组成、布置和几何尺寸输入和修改数据,输入的数据与截面纤维图形具有实时

交互性,钢筋类型(HPB300,HRB335,HRB400,HRB500)和混凝土强度等级(C15~C80)可以自由灵活选择。此外,当数据输入操作不合理或不符合逻辑时(例如:箍筋间距、内置型钢尺寸超过截面轮廓尺寸),具有相应的实时提示功能。

(3)UMAT 程序输出功能及其界面操作具有友好性。数据输出可以对不同截面纤维数量进行统一设置,以保持不同截面材料纤维数量的一致性,对生成数据的截面名称和顺序可以自由设置,进而批量性生成数据。

(4)本文开发的 UMAT 程序作为生成截面纤维数据的一种可视化工具,可为采用 MSC. MARC 软件进行大跨和超高层等结构的动力弹塑性和倒塌分析提供便利。

参 考 文 献

[1] 柳国环,陆新征,于秀雷,等. 大跨、高层结构动力弹塑性和倒塌分析(Ⅲ):SAP2MARC 和 MARCPOST 技术开发与应用[J]. 建筑结构,2014,44(4):94-101.

[2] 柳国环,陆新征,李敏. 大跨、高层结构动力弹塑性和倒塌分析(Ⅰ):原理、MSC. MARC 子程序开发与验证[J]. 建筑结构,2014,44(4):82-87.

[3] GB 50010—2010 混凝土结构设计规范[S]. 北京:中国建筑工业出版社,2011.

[4] 汪训流. 配置高强钢筋线无粘结钢筋混凝土柱复位性能的研究[D]. 北京:清华大学,2007.

[5] 韩林海. 钢管混凝土结构:理论与实践[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2007.

[6] RUSCH H. Researches toward a general flexural theory for structural concrete[J]. ACI Journal Proceedings, 1960, 57(7): 1-28.

[7] HOGNESTAD E, HANSON N W, MCHENRY D. Concrete stress distribution in ultimate strength design[J]. ACI Journal Proceedings, 1955, 52(12): 455-480.

[8] LEGERON F, PAULTRE P. Uniaxial confinement model for normal and high-strength concrete columns[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 2003, 129(2): 241-252.

[9] MANDER J B, PRIESTLEY M J N, PARK R. Theoretical stress-strain model for confined concrete[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1988, 114(8): 1804-1826.

[10] RUSCH H. Researches toward a general flexural theory for structural concrete[J]. ACI Journal Proceedings, 1960, 57(7): 1-28.

[11] 陈肇元,朱金铨,吴佩刚. 高强混凝土及其应用[M]. 北京:清华大学出版社,1992.